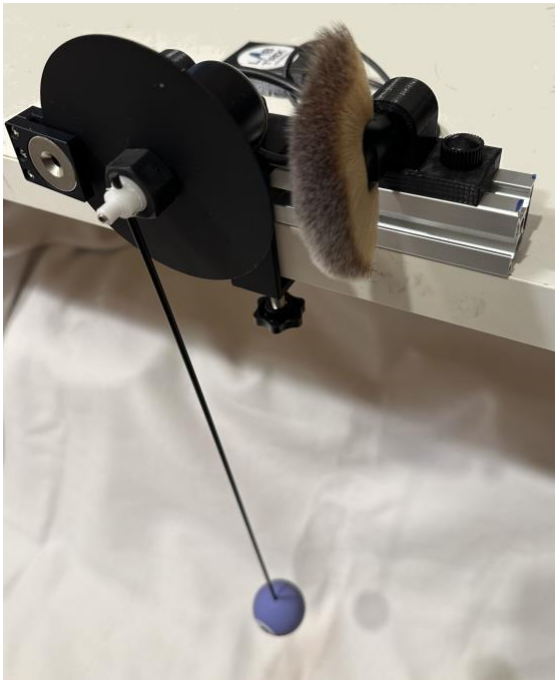
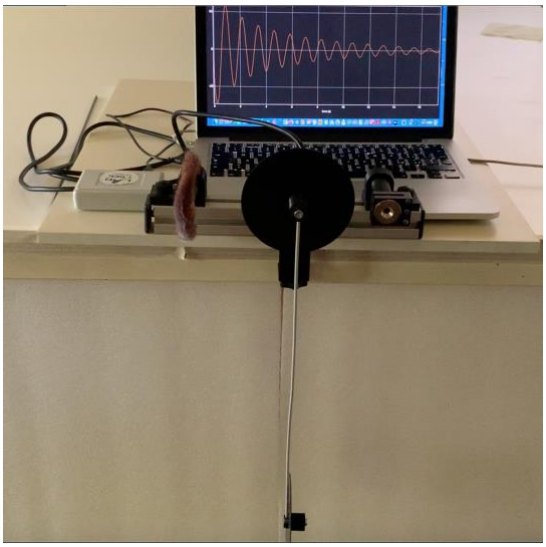
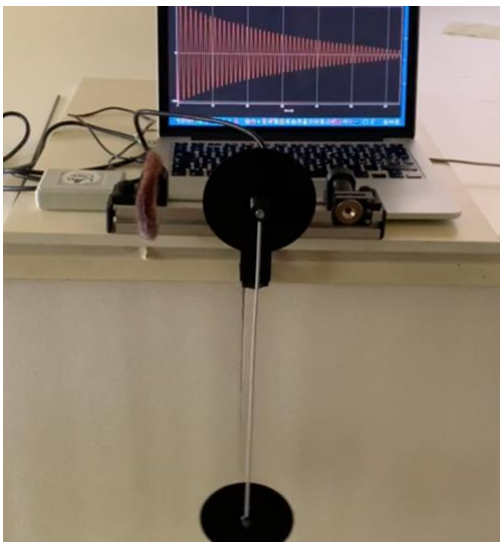
Nuovo pendolo per studiare con smartphone il moto a grandi/piccole ampiezze, e con diversi tipi di attrito







Introduzione

Descriviamo un semplice strumento didattico che utilizza :
- acquisizione dati in tempo reale mediante smartphone o tablet
- e un pendolo accoppiato ad un sensore di rotazione a basso attrito, con *lunghezza* efficace e *massa variabili*,
- e con due diversi tipi di smorzamento aggiustabili : attrito "*radente*" e attrito "*viscoso*" (proporzionale alla velocità angolare).

Un datalogger dedicato consente di usare la App *Phyphox* per Android e IOS nella acquisire dati che possono essere trasferiti su PC per analisi dettagliate.

Gli esperimenti possono consistere nel verificare che :
1) il periodo per piccole oscillazioni NON dipende dal valore della massa *M* (provando con palline di gomma di diametro diverso),
2) il periodo per piccole oscillazioni dipende dalla radice quadrata della lunghezza efficace (usando aste di lunghezza diversa, o in prima approssimazione spostando la palllina lungo la stessa asta)
3) che il periodo per grandi oscillazioni dipende dalla ampiezza (si possono confrontare i dati sperimentali con le previsioni teoriche)
4) che lo smorzamento è LINEARE per attrito RADENTE
5) che lo smorzamento è ESPONENZIALE per attrito VISCOSO

Gli esperimenti possono consistere nello studio di vari comportamenti del sistema:

1) Studio del periodo per *piccole oscillazioni (moto armonico)*.

- Dipendenza del periodo dal valore della massa *M*. Per fare ciò, il pendolo può essere caricato con sfere di gomma di diverse dimensioni, o con dischi .
- Dipendenza del periodo dalla lunghezza *L*. Per fare ciò, si fanno scorrere le masse (pallina o dischi) lungo l'asta.

2) Studio del periodo per *grandi oscillazioni (moto anarmonico)*.

Quando l'elongazione massima del pendolo (ampiezza) è maggiore di circa 10°, il comportamento del pendolo diventa particolarmente interessante per studenti di livello intermedio o avanzato.
- Da un lato, il periodo dipende dall'ampiezza e le oscillazioni del pendolo non sono più armoniche.
- Molte proprietà del sistema associate alla sua non linearità diventano evidenti e questo genera nuove sfide per il suo studio.
- Questo dispositivo è particolarmente adatto e flessibile per svolgere questo tipo di studio, i cui risultati possono essere confrontati con vari modelli teorici.

3) Analisi del moto per *vari tipi di smorzamento*.

- Studio del moto con *attrito radente*. Si osserva una diminuzione LINEARE dell'ampiezza con il tempo. L'entità di questo smorzamento può essere variata.
- Studio del moto con *attrito viscoso*, cioè proporzionale alla velocità. Si osserva una diminuzione ESPONENZIALE dell'ampiezza con il tempo. La quantità di smorzamento può essere variata.

Contenuto del kit

- **datalogger** con connessione **USB** e **Bluetooth**
- **sensore di rotazione con piccolo attrito**
- **asta sottile** in fibra di carbonio
- **2 Palline** di gomma forate
- **2 dischi** di alluminio
- **supporto** per appendere dischi all'asta
- **magnete** montato su slitta
- **spazzolino** montato su slitta
- **rotaia**, con **morsa da tavolo**

L'apparato sperimentale

Il moto del pendolo è considerato il moto armonico per eccellenza (isocronismo delle *piccole oscillazioni*) ma per *grandi ampiezze* d'oscillazione le deviazioni dall'isocronismo, conseguenti al fatto che l'equazione del moto non è lineare se non nell'approssimazione di piccoli angoli, possono superare il 50%.
E' perciò un argomento sperimentale che permette di osservare le caratteristiche principali sia del comportamento *armonico* che di quello *anarmonico*.
Lo studio sperimentale del moto di un pendolo è reso più agevole ed efficace se realizzato mediante una acquisizione on-line dei dati sperimentali.
In questo dispositivo usiamo un sensore angolare collegato ad un datalogger dedicato, dotato di connessioni bluetooth e USB, che può essere controllato da PC o da smartphone o tablet.

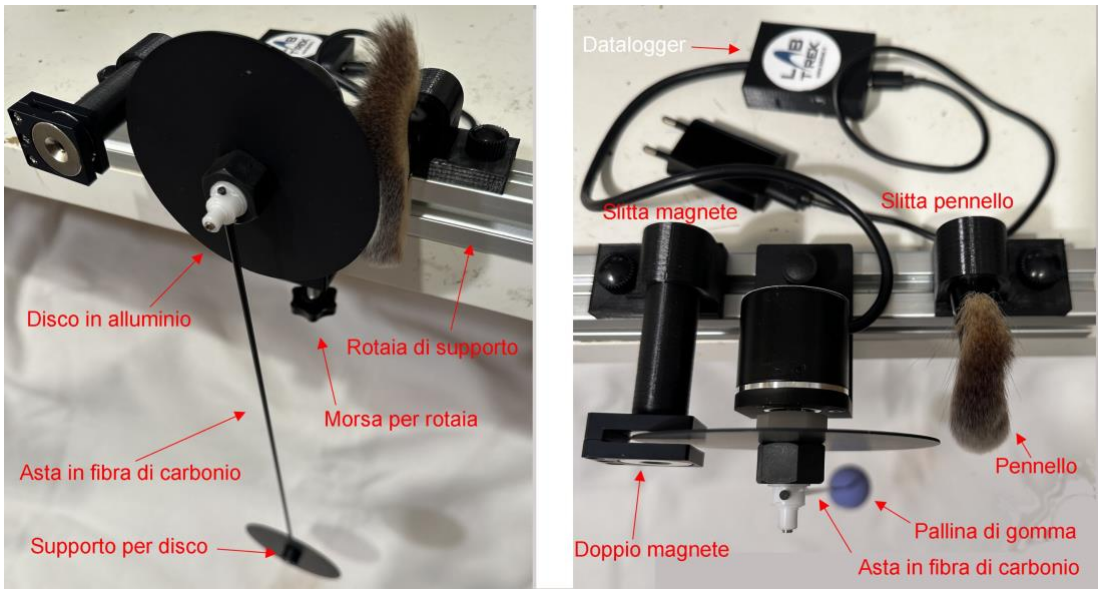


Fig. 1 – Il dispositivo sperimentale

Il pendolo è costituito da una pallina di gomma fissata ad un'asta sottile attaccata al perno di un sensore angolare con piccolissimo attrito.
Per poter studiare sia attrito *viscoso* che attrito *radente*, il pendolo è dotato di un *disco di alluminio* solidale al perno del sensore. In tal modo l'oscillazione del pendolo può essere smorzata da un *momento resistente* M_R prodotto da due tipi di forze: una *forza viscosa* prodotta da un magnete avvicinato al disco (le correnti di Foucault dovute al moto relativo di disco-magnete producono un momento resistente proporzionale alla velocità angolare $M_R = -\gamma\omega$, oppure una forza costante (*attrito radente*) prodotta da un pennello morbido appoggiato al disco $M_R = -A\ \text{segno}(\omega)$.
In figura 1 sono evidenziati gli elementi che compongono l'apparato: *datalogger*, *sensore di rotazione*, *asta sottile* in fibra di carbonio, *pallina forata* di gomma, *disco* in alluminio, *magnete* montato su slitta scorrevole, *pennello* montato su slitta scorrevole.
Il sensore e le due slitte sono montati su una rotaia di alluminio, dotata di una *morsa* che permette di fissarla al bordo di un tavolo
- La *lunghezza efficace* $L_{eff} = L/F^2$ del pendolo può essere modificata facendo scorrere la pallina lungo la bacchetta.
- Il valore della *massa M* può essere modificato cambiando il tipo di pallina di gomma o appendendo dischi di alluminio in dotazione.

1. L'equazione del moto del pendolo

In figura 2 è mostrato uno schema del pendolo. Indichiamo con l ed m la lunghezza e la massa dell'asta, con M ed L la massa della pallina e la distanza del suo centro dall'asse di rotazione, con m'ed r la massa ed il raggio del disco. Allora il *momento d'inerzia totale I* rispetto all'asse di rotazione vale :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1/3\ ml^2 + ML^2 + 2/3\ m'r^2 \qquad (1)$$

(I_1=1/3 ml^2 è il contributo dell'asta, I_2= ML^2 della pallina, I_3=2/3 $m'r^2$[2] del disco).

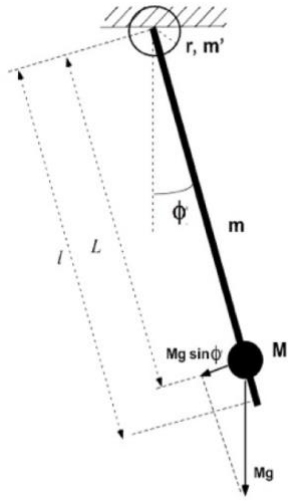


Fig. 2
Schema del pendolo

Il momento delle forze peso dell'*asta* (applicato a metà della stessa) e della *pallina* (considerata una massa puntiforme) si può scrivere: (ml/2 + ML) g sinϕ, dove ϕ è l'angolo di rotazione del pendolo. L'equazione del moto è allora:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\left(\frac{ml}{2} + ML\right) g\ \sin\phi - M_R \qquad (2),$$

indicando con M_R il momento della forza resistente (attrito del perno e resistenza dell'aria).

Introducendo la costante

$$F^2 = \left(1 + \frac{ml}{2ML}\right) / \left(1 + \frac{ml^2}{3ML^2} + \frac{2m'r^2}{3ML^2}\right)$$

la relazione (2) si può riscrivere come:

$$d^2\phi/dt^2 = -gF^2/L\sin\phi - M_R/I \qquad (3)$$

che coincide con l'equazione del moto di un *pendolo semplice* di lunghezza efficace [*] $L_{eff} = L/F^2$.

La lunghezza efficace L_{eff} può essere modificata facendo scorrere la pallina lungo la bacchetta. Anche il valore della massa M può essere modificato cambiando il tipo di pallina di gomma.

L'oscillazione del pendolo è sempre smorzata dal momento resistente dovuto alla viscosità dell'aria e proporzionale al *coefficiente di resistenza aerodinamica* C_d della massa oscillante[†]. Il coefficiente C_d (*Drag coefficient*), dipende dalla forma del corpo in moto, ed è stato misurato per forme svariate[‡]. In particolare per un disco esso varia molto se la superficie del disco è parallela o ortogonale alla direzione del moto.

L'oscillazione può essere artificialmente smorzata da un ulteriore momento resistente M_R prodotto da due tipi di forze aggionte: una *forza viscosa* prodotta da un magnete posto vicino al disco di alluminio (le correnti di Foucault dovute al moto relativo di disco-magnete producono un momento resistente proporzionale alla velocità angolare del disco [$M_R = -\gamma\,\omega$, oppure una forza circa costante (*attrito radente*) prodotta da un pennello morbido appoggiato al disco [$M_R = -A$ segno(ω)].

L'intensità di ciascuna forza resistente può essere variata aggiustando la posizione del magnete o del pennello rispetto al disco coassiale al sensore di rotazione, o (nel caso si usi un disco invece che una sfera come massa oscillante) regolando il piano del disco rispetto al piano di oscillazione.

---

[*] Il fattore F^2 può essere abbastanza vicino ad 1, ad esempio con m=5 g, M=50 g, l = 51 cm, L= 50 cm, m'=20 g, r'=5 cm, F^2 vale 1.013 ; se la massa della pallina è dimezzata (M=25g) allora la correzione passa dal 1% al 3% (F^2 =1.028). Si ricorda che, nel limite di piccole oscillazioni e trascurabile attrito, il periodo delle oscillazioni è $T = 2\pi\sqrt{(L_{eff}/g)}$.

[†] https://it.wikipedia.org/wiki/Coefficiente_di_resistenza_aerodinamica

[‡] https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient

2. L'uso di phyphox per acquisizione dati

LabTrek ha sviluppato una applicazione per Android e IOS che si appoggia alla applicazione *PhyPhox*, scaricabile gratuitamente in internet.

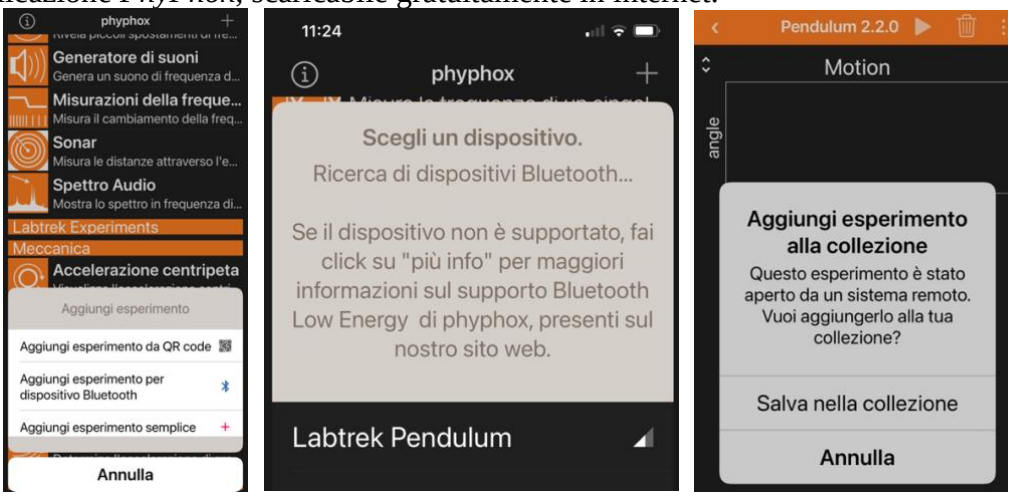


Figura 3 Aggiunta di un esperimento Bluetooth a Phyphox e selezione di Labtrek Pendulum

Per installare il sottomenu LabTrek Phyphox per il pendolo, è sufficiente avviare Phyphox sullo smartphone o sul tablet, cliccare sul + in alto a destra (Fig. 3 sinistra) , selezionare l'opzione "*Aggiungi esperimento per dispositivo Bluetooth*".
Phyphox cerca immediatamente i dispositivi Bluetooth disponibili. Ovviamente il datalogger Labtrek deve essere posizionato non troppo lontano dallo smartphone/tablet che lo sta ricercando, poiché il protocollo di comunicazione Bluetooth ha una portata non superiore ai dieci metri. Non appena il datalogger Labtrek per il pendolo è stato rilevato esso appare nella lista dei dispositivi disponibili: si deve selezionare "*Labtrek Pendulum*" (Fig. 3 centro).
Per mantenere questo esperimento nella collezione Phyphox scegliere "Salva nella collezione" (Fig. 3 destra).



Figura 4 Salvataggio dell'esperimento in un nuovo elenco di esperimenti PhyPhox

A questo punto l'esperimento Pendulum appare nella collezione di "Labtrek Experiments" (Fig. 4 destra).
Ora toccando l'icona della applicazione (Fig. 4 destra) si apre la finestra "Pendulum" per acquisizione dati (Fig. 5 in alto).

In questa finestra, cliccando sul simbolo "doppia freccia" in alto a sinistra, si accede alla versione con le opzioni "Zoom" , "Selezione" e "Altri strumenti" (Fig. 5 in basso)



Figura 5 Finestra di acquisizione dati (senza opzioni in alto, con opzioni in basso)

Nella finestra di acquisizione dati, *dopo aver spostato il pendolo dalla sua posizione di equilibrio* (angolo zero) ad un angolo superiore a circa 50 gradi, si avvia la acquisizione dati cliccando in alto a destra il "triangolo".
Il grafico dell'angolo in funzione del tempo potrebbe sembrare a prima vista quello di un moto armonico (Fig. 6).

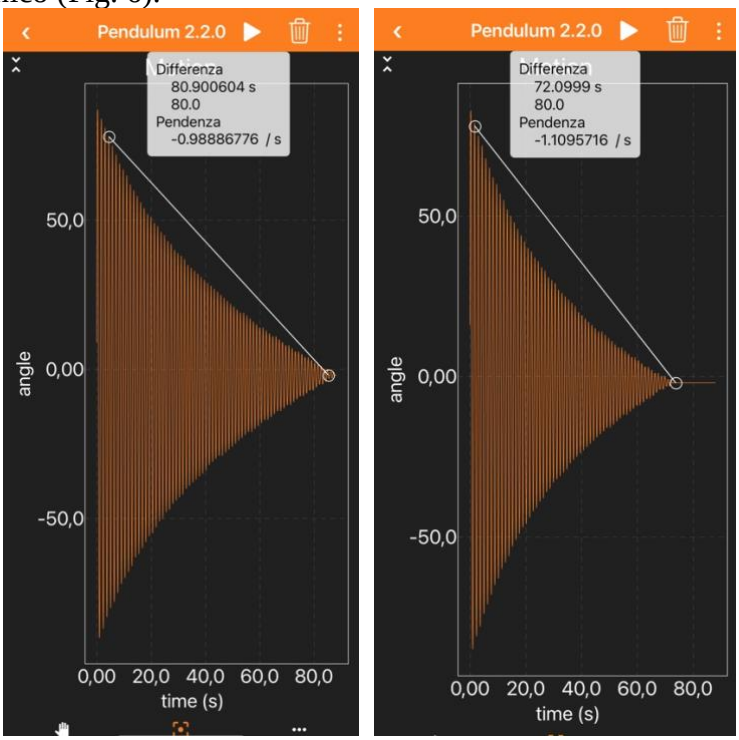


Figura 6 Oscillazioni "libere" (sinistra) e smorzate dal magnete (destra)

Una interpolazione dell'ampiezza su due punti rivela che il pendolo si smorza in modo *non lineare* (Figura 6 sinistra). Lo smorzamento è invece esponenziale, per effetto

dell'attrito viscoso dell'aria sulla sfera oscillante, e diventa più evidente se si aumenta il frenamento "viscoso" avvicinando un magnete al disco di alluminio (Figura 6 destra).
La forma del grafico cambia molto se si frena il disco toccandolo con un pennello (Figura 7): in questo caso si osserva uno *smorzamento lineare*.

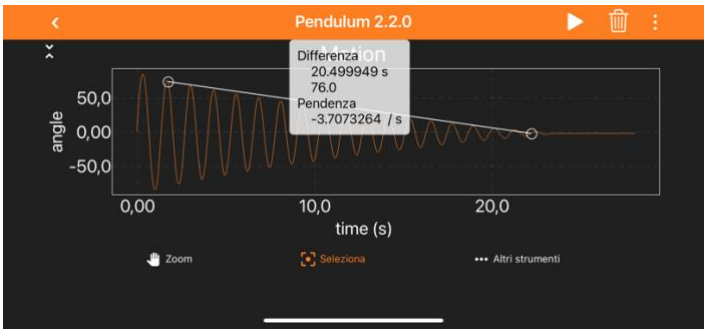


Figura 7 Frenamento dovuto al pennello (*attrito radente*)

La applicazione consente pochissime azioni di manipolazione dei dati acquisiti: *Zoom*, (per asse *y* e asse *x*) e *Selezione* di due punti acquisiti (per i quali viene tracciata *interpolazione lineare* e vengono mostrati gli *intervalli temporali* $=\Delta x=x_2-x_1$, *variazione di ampiezza* $=\Delta y=y_2-y_1$ e *pendenza* della retta interpolante).
Per altre manipolazioni l'utente deve usare un sistema esterno di analisi dati, ad esempio Excel, LoggerPro o altro: un click sulla scritta "*Altri strumenti*" nella finestra in basso, apre la finestra ove si può selezionare "*Esporta questi dati*" (Fig. 8 sinistra)
La finestra "*Esporta dati*" consente di scegliere il tipo di file di esportazione: Excel© e CSV in vari formati (Fig. 8 centro).

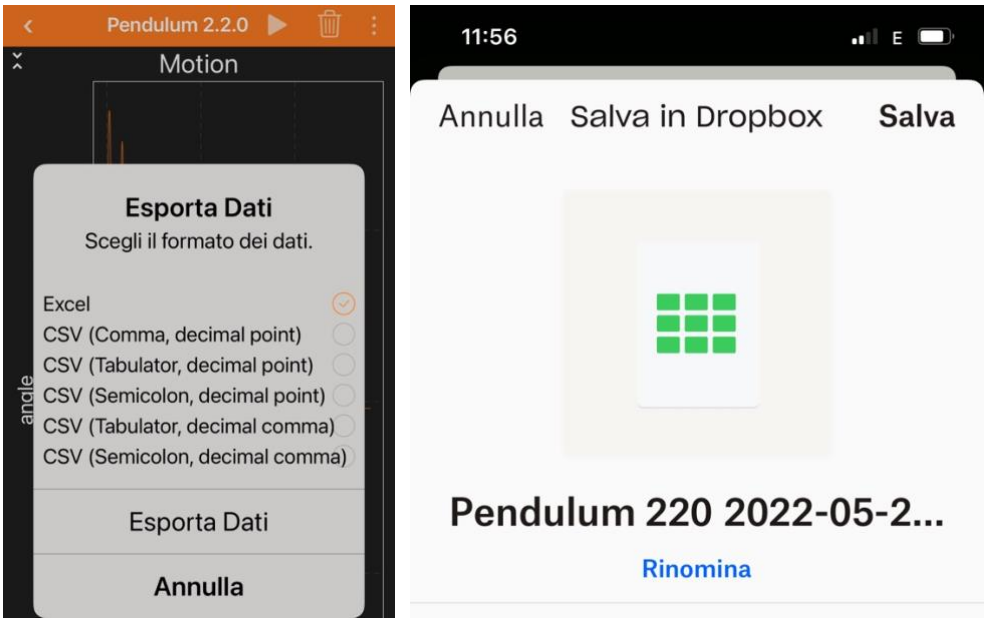


Figura 8 Finestra "*Esporta Dati*"

Dopo aver scelto in che formato si vuole salvare il file, toccando "*Esporta Dati*" si apre la lista dei modi in cui si vuole esportare il file (il più comune è in una casella DropBox accessibile allo smartphone/tablet : "*Salva in DropBox*") (Fig. 8 destra).
Tuttavia, anche all'interno della applicazione PhyPhox-Labtrek è possibile fare una prima analisi dati usando solo smartphone: ad esempio, selezionando un picco positivo nel grafico e poi un secondo picco adiacente, dal valore nel campo "Differenza" (distanza temporale dei due punti), si ricava il *periodo*. Eseguendo tale operazione su

porzioni del grafico a diverse ampiezze si può dimostrare la dipendenza del periodo dall'ampiezza (Figura 9).

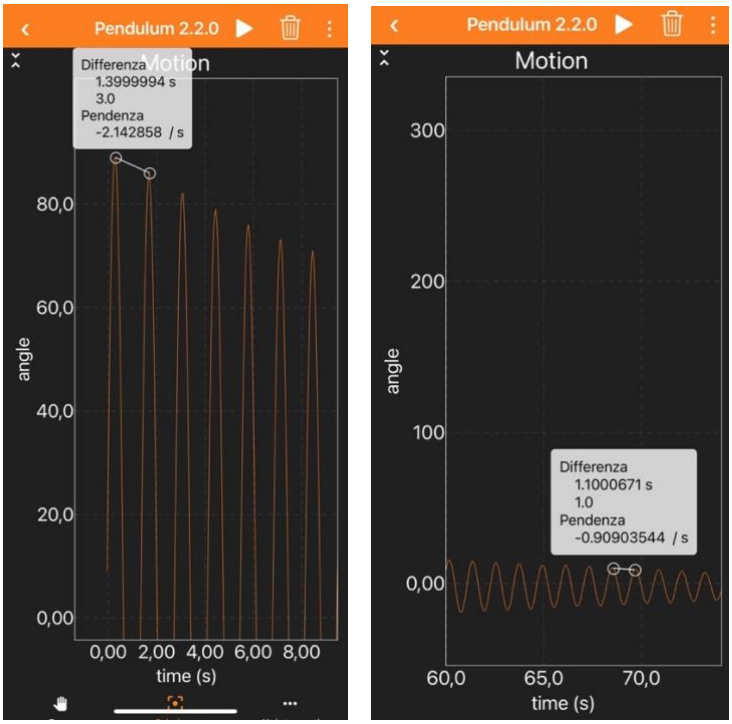


Figura 9 Misura del periodo ad ampiezze diverse

Per poter ottenere in Phyphox i grafici di Figura 9 si devono usare le opzioni "Zoom" e "Selezione".
Nel caso illustrato si vede che il periodo passa da 1.4 secondi (per ampiezza circa 90 gradi), a 1.1 secondi (per ampiezza di circa 10 gradi).

Una alternativa è quella di usare la opzione "abilita accesso remoto" e comandare la acquisizione da un PC che sia collegato alla stessa rete WIFI cui è connesso lo smartphone conPhyphox (Figura 10)

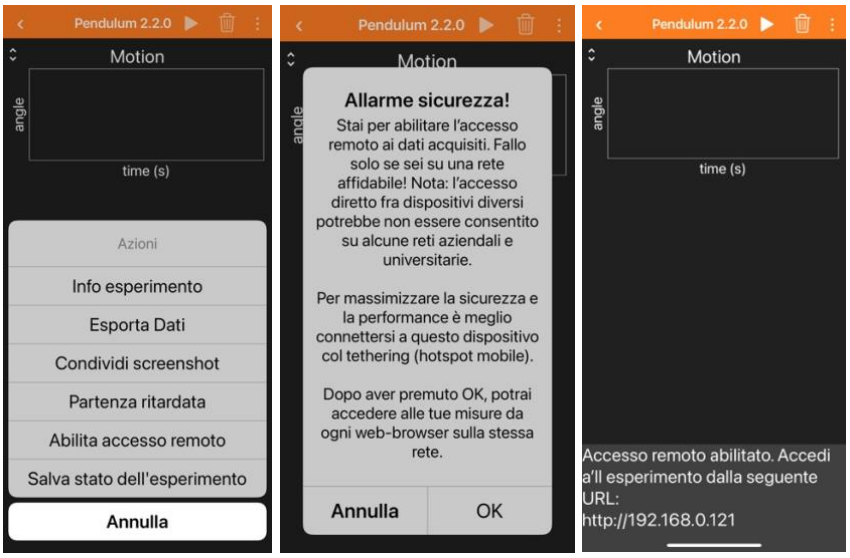
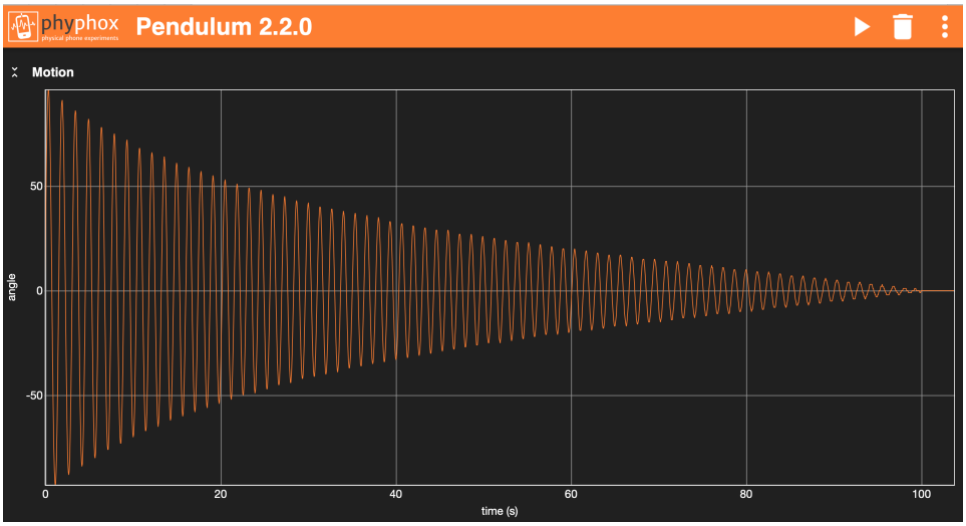
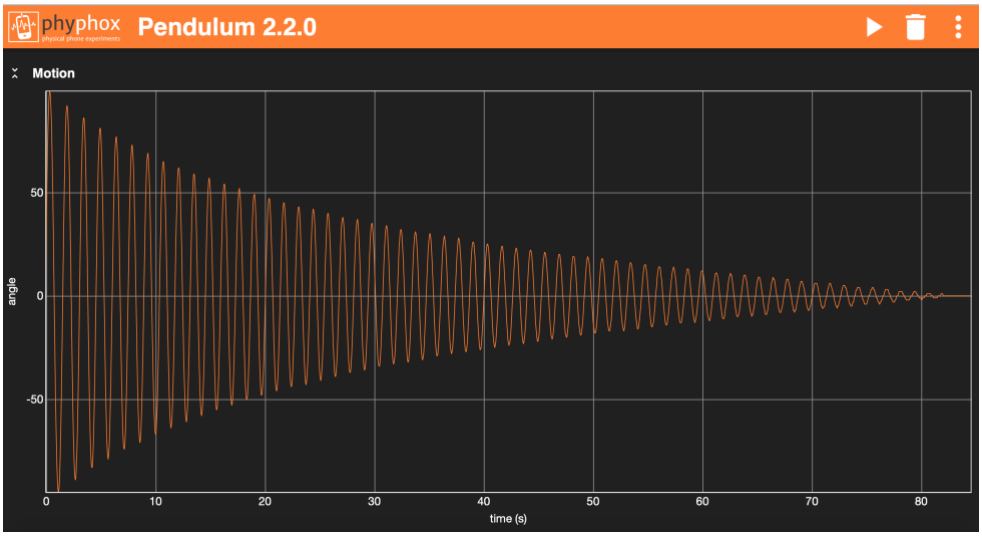


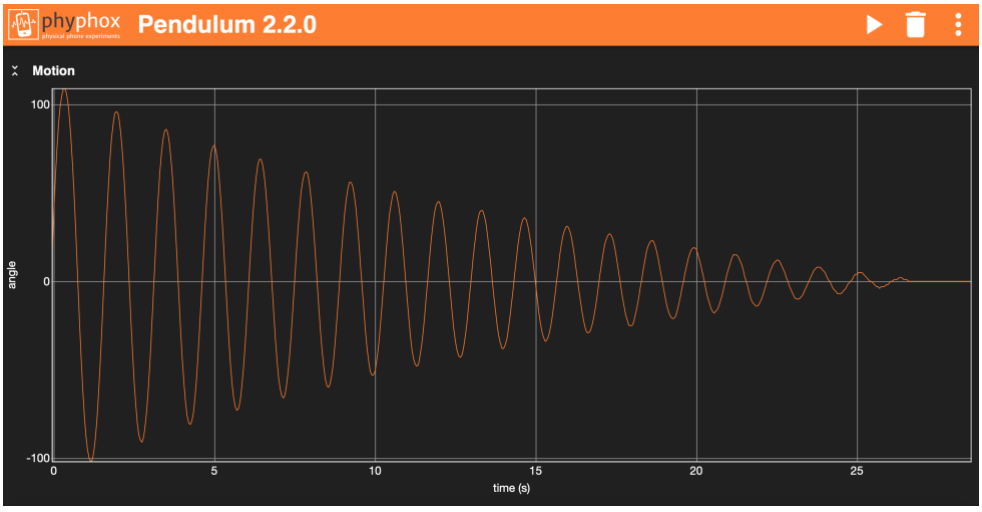
Figura 10 abilitazione di accesso da PC



Acquisizione di oscillazioni libere (attrito viscoso solo dell'aria)



Acquisizione di oscillazioni con magnete vicino al disco (attrito viscoso maggiore)



Acquisizione di oscillazioni frenate dal pennello (attrito radente)

3. Dati acquisiti sostituendo la sfera con un disco

Un esempio di due set di dati acquisiti con un disco oscillante anziché una sfera oscillante (vedi figura 10) è mostrato in figura 11.

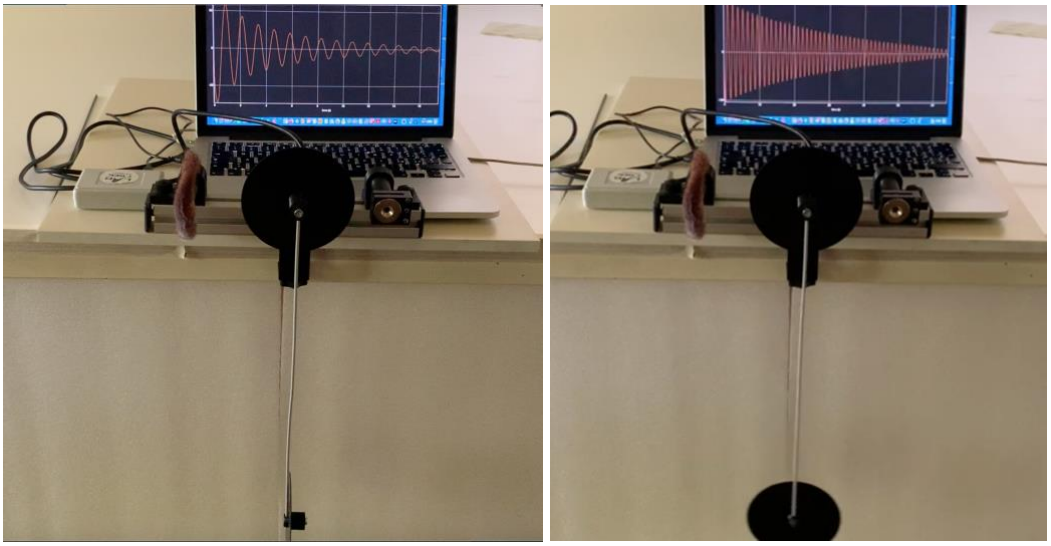


Figura 10 : Un disco può sostituire la palla, utilizzando uno strumento di montaggio

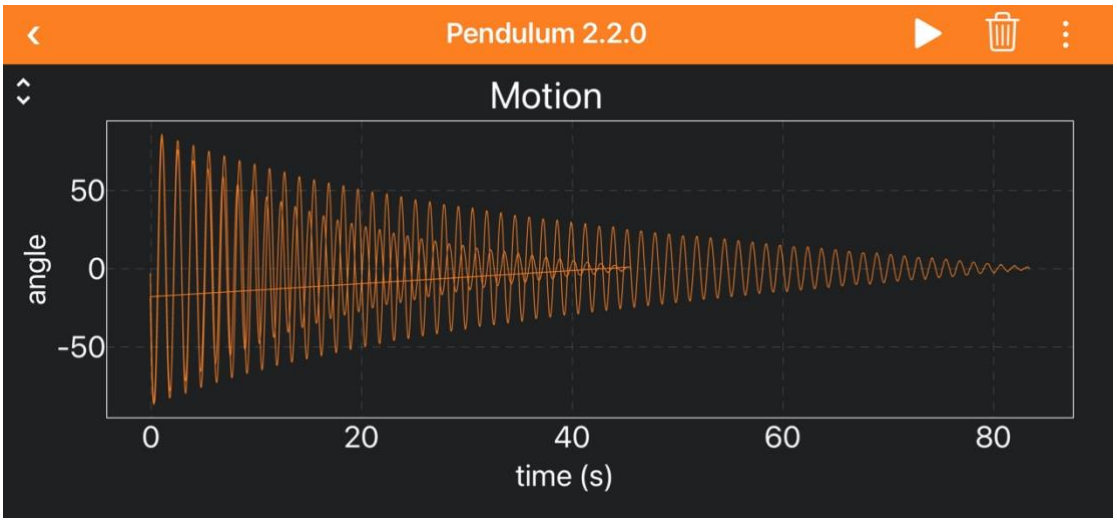
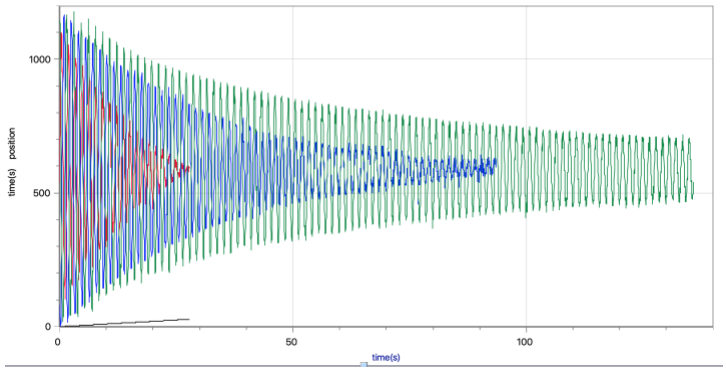


Figura 11 : Due set di dati acquisiti con un disco oscillante.

Nella figura 11, la traccia più lunga è stata acquisita con il disco in piano rispetto al piano di oscillazione (minore attrito viscoso).
La traccia più corta è stata acquisita con il disco inclinato di un angolo di 30 gradi (attrito viscoso maggiore).
È evidente che inclinando il disco si ottiene uno smorzamento maggiore dovuto all'aumento del fattore di forma del corpo oscillante.

4 Analisi con foglio elettronico: interpolazione con una funzione predefinita

Un esempio di rappresentazione di tre set di dati (acquisiti con pendolo libero, frenato magneticamente e con attrito radente) ottenuto riportando i dati sperimentali su *EXCEL* è il seguente



Pendolo libero (verde), frenato magneticamente (blu) e con attrito radente (rosso)

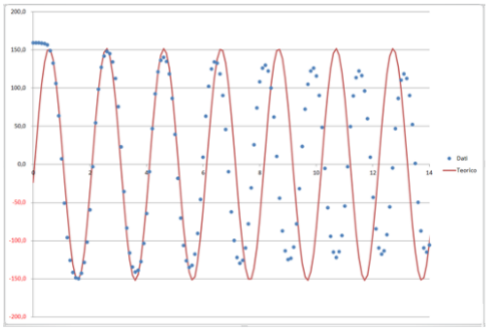
Riportiamo di seguito alcuni esempi di come l'analisi dettagliata dei dati può essere eseguita utilizzando Excel

Possiamo inserire, nella prima colonna (A) i valori del tempo e nella seconda (B) i valori degli angoli *misurati*. Poi, supponendo che si tratti di un *moto armonico non smorzato* $\Phi(t)=\Phi_o \text{ sen}[\Omega(t+t_o)]$, inseriamo nella terza colonna (C3), la formula =$H$1*SEN($H$2*(A3+$H$3)), (con ampiezza iniziale Φ_o=$H$1, pulsazione Ω =$H$2, sfasamento temporale t_o =$H$3).

Possiamo attribuire a tali parametri dei valori ragionevoli, e poi modificarli fino ad ottenere un buon accordo con i dati sperimentali.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Tempo (s)**	**Angolo (°)**	**Ang. Teo. (°)**				**A =**	152	°
2							**omega =**	3,1	rad/s
3	0	159,6	-23,5				**shift =**	-0,05	s
4	0,1	159,6	23,5						
5	0,2	159,6	68,2						
6	0,3	158,9	106,4						
7	0,4	158,7	134,4						
8	0,5	156,8	149,7						
9	0,6	149,1	150,6						
10	0,7	132,9	137,2						
11	0,8	106,2	110,8						
12	0,9	64,0	73,8						
13	1	7,5	29,7						
14	1,1	-50,9	-17,2						

Foglio Excel



e confronto con sinusoide per *grandi* ampiezze

La forma non si discosta molto da un andamento sinusoidale; ma l'ampiezza e il periodo calano nel tempo (il *periodo di oscillazione cresce all'aumentare dell'ampiezza*).

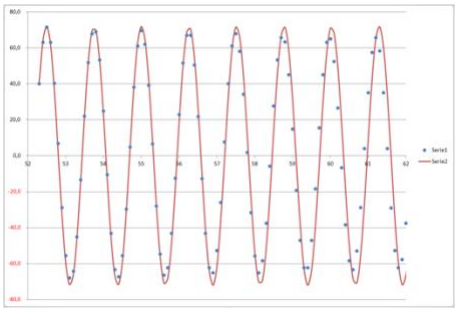
Il pendolo usato è lungo 40 cm; il che corrisponde a un periodo T=1,27s (ω=5rad/s).

Nel foglio Excel abbiamo inserito un valore della pulsazione più piccolo (ω=3,1rad/s), che corrisponde ad un periodo maggiore (T=2,03 s).

Se invece consideriamo una porzione di oscillazioni successive, quando l'ampiezza di oscillazione si è ridotta l'accordo fra simulazione e dati migliora.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Tempo (s)**	**Angolo (°)**	**Ang. Teo. (°)**				**A** = 72		°
2							**omega** = 5		rad/s
3	52,3	40,1	41,0				**shift** = 0,60		s
4	52,4	63,0	64,4						
5	52,5	71,7	72,0						
6	52,6	63,0	61,9						
7	52,7	40,3	36,7						
8	52,8	6,8	2,5						
9	52,9	-28,8	-32,3						
10	53	-55,5	-59,2						
11	53,1	-68,0	-71,6						
12	53,2	-64,2	-66,5						
13	53,3	-45,0	-45,1						
14	53,4	-13,4	-12,7						

Foglio Excel



e confronto con sinusoide per *piccole* ampiezze

Qui si può constatare che il periodo è circa di 1,2 s, in discreto accordo col valore teorico.

5. Interpolazione con simulazione ottenuta da calcolo iterativo

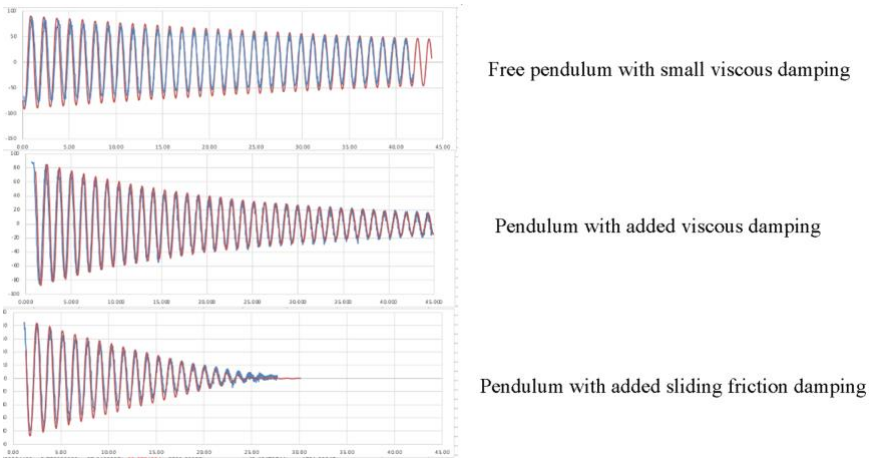
Di seguito riportiamo un esempio di simulazione ottenuta con calcolo iterativo all'interno di Excel per un moto *smorzato*.
Costruiamo 4 colonne calcolate, rispettivamente per tempo *t*, angolo ϕ, velocità angolare, $\omega=d\phi/dt$ e accelerazione angolare $\alpha=d\omega/dt$.
Nella prima riga di ogni colonna inseriamo i valori iniziali per $t=0$ (ϕ_0 e ω_0) e digitiamo la formula per il primo valore dell'accelerazione angolare.

$$\alpha_0 = \; = -g/L \sin\phi_0 - A \,\text{segno}(\omega_0) - c^* \omega_0,$$

Sarà ovviamente necessario scegliere opportunamente i valori per *A* e per *c* (mediante un metodo *trial/error*), ma possiamo partire dal moto non smorzato ponendo $A = c = 0$.
Quindi si sceglie il valore dell'incremento temporale d*t*, e si calcolano iterativamente i valori nelle 4 colonne digitando nella *seconda* riga le seguenti formule

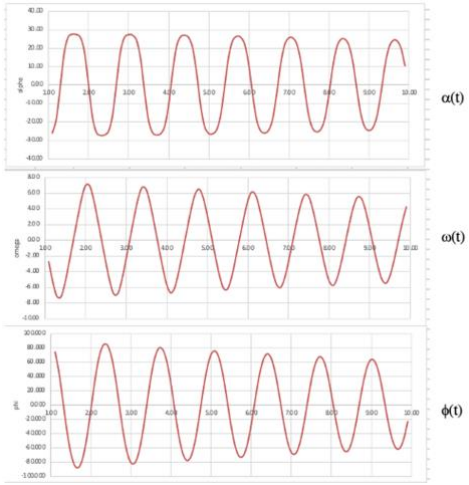
$$t\,(i+1) = t(i)+dt$$
$$\omega\,(i+1) = \omega\,(i)+ \alpha(i)*dt$$
$$\phi\,(i+1) = \phi(i)+ \omega(\mathbf{i+1})*dt$$
$$\alpha(i+1) = -g/L \sin[\phi(\mathbf{i+1})] - A \text{ segno } [\omega\,(\mathbf{i+1})] - c^* [\omega\,(\mathbf{i+1})]$$

Poi si selezionano tutte le 4 caselle della seconda riga e si trascinano in basso per fare eseguire a Excel il calcolo iterativo.
La scelta dei migliori valori iniziali per ϕ_0 e ω_0, risulta semplificata se si selezionano i dati sperimentali in modo da avere un picco di ampiezza ϕ_0 per $t=0$: in tal modo si sa che la velocità $\omega=d\phi/dt$ è nulla ($\omega_0=0$).
Conviene costruire innanzitutto un grafico dei dati sperimentali (dopo aver selezionato le colonne t_{sper} e ϕ_{sper}, ove sono stati collocati i valori importati dal file CSV, nel menù principale: *Inserisci Grafico*).
Per confrontare i valori calcolati nella simulazione, con i valori sperimentali, si può, dopo aver selezionato il grafico, scegliere nel menu principale ChartDesign/SelectData, e aggiungere una serie di dati, scegliendo le *colonne calcolate t* e ϕ.
Poi, si può iniziare ad inserire smorzamento viscoso non nullo ($c>0$) o smorzamento radente non nullo ($A>0$).
Un esempio di risultati delle simulazioni è mostrato in figura (in blu dati misurati, in rosso simulazione)



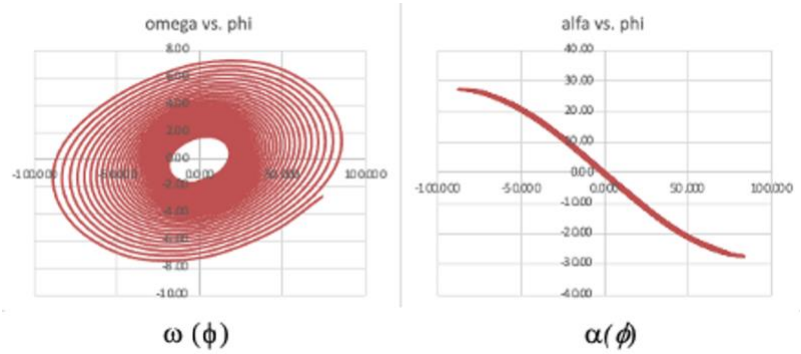
I tre diversi andamenti simulati (in rosso) e dati sperimentali (in blu)

Una volta ottenuto un buon accordo per l'angolo $\phi(t)$, tra simulazione e dati sperimentali in funzione del tempo, possiamo procedere al confronto dei grafici $\phi(t)$, $\omega(t)$, e $\alpha(t)$, e quindi possiamo costruire i grafici $\phi(\omega)$ e $\alpha(\phi)$



Andamento dei dati simulati adattati ai dati misurati

Possiamo osservare che la pulsazione $\omega(t)$, e l'accelerazione angolare $\alpha(t)$, per ampiezze grandi, non sono funzioni sinusoidali.



I grafici di ω e di α in funzione di ϕ .

Possiamo osservare che il grafico $\phi(\omega)$ è ellittico solo a piccole ampiezze, e dal grafico $\alpha(\phi)$ vediamo che solo a piccole ampiezze l'accelerazione è proporzionale all'angolo (come previsto dal moto armonico $\alpha=-K\phi$).

6. Studio del periodo in funzione dell'ampiezza

Alle grandi ampiezze d'oscillazione non è possibile risolvere analiticamente l'equazione del moto per la non linearità introdotta dal $\sin\phi$, ma sfuttando l'equazione della conservazione dell'energia, si puo' calcolare il periodo d'oscillazione T in funzione dell'*ampiezza* θ mediante l'integrale §:

$$T = \frac{4}{F}\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta}\frac{d\phi}{c\sqrt{cos\phi - cos\theta}} \qquad (4).$$

Dimostrazione:
Trascurando la forza resistente la somma dell'energia cinetica **

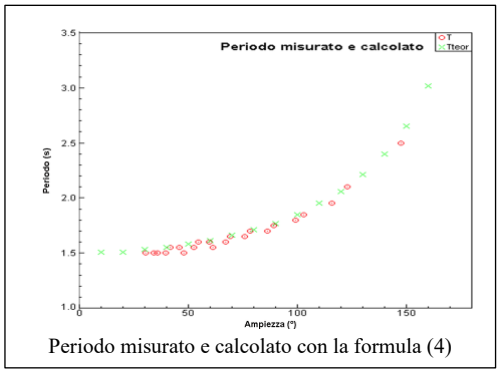
$$E_{cin} = 1/2\ I\ (d\phi/dt)^2 = 1/2\ (1/3\ ml^2 + ML^2\ )\ (d\phi/dt)^2$$
$$= 1/2\ ML^2\ [1+1/3\ ml^2/(ML^2)]\ (d\phi/dt)^2$$

più l'energia potenziale $U = (m\ l/2 + M\ L)\ g\ (1\text{-}\cos\phi)$
rimane costante al valore iniziale $E_{tot} = E_{cin}+U=(ml/2 + ML)\ g\ (1\text{-}\cos\theta)$,
dove θ è *l'ampiezza* iniziale di oscillazione.
Allora si ha: $1/2ML^2\ [1+1/3\ ml^2/(ML^2)]\ (d\phi/dt)^2= (ml/2+ML)\ g\ (\cos\phi - \cos\theta)$,
e quindi:

$$(d\phi/dt)^2 = 2g\ F^2/\mathrm{L}\ (\cos\phi - \cos\theta) \qquad (5).$$

Facendo la radice quadrata e invertendo si ricava poi: $dt = \frac{\sqrt{L/(2g)}}{F\sqrt{cos\phi - cos\theta}}d\phi$

La (4) si ottiene infine integrando da t=0 a t=1/4 di periodo e moltiplicando il risultato per 4. L'integrale e' un integrale ellittico che si puo' trovare tabulato o si puo' calcolare numericamente in maniera approssimata. La funzione da integrare diverge pero' all'estremo superiore per cui l'integrazione numerica deve essere piuttosto accurata cioe' va fatta con molti passi.

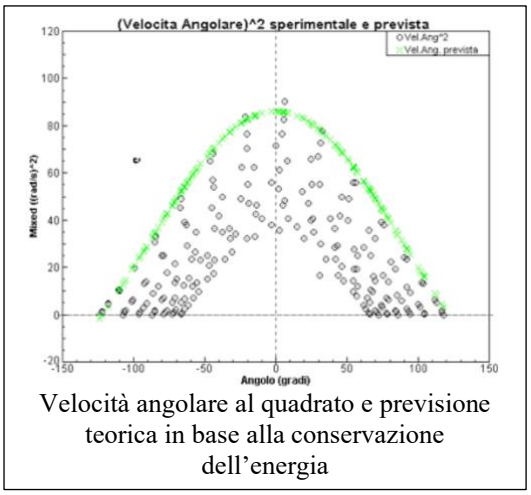


Periodo misurato e calcolato con la formula (4)

Graficando il periodo misurato in funzione dell'ampiezza assieme con i valori calcolati usando la formula (4), si vede che l'accordo fra misure e predizione è piuttosto buono.
E' possibile controllare la bontà del modello anche confrontando l'andamento della velocità angolare sperimentale al quadrato ω^2 in funzione dell'angolo con quello previsto dall'equazione di conservazione dell'energia :

$$\omega^2=(d\phi/dt)^2 =2gF\omega^2/L(\cos\phi - \cos\theta). \quad (5').$$

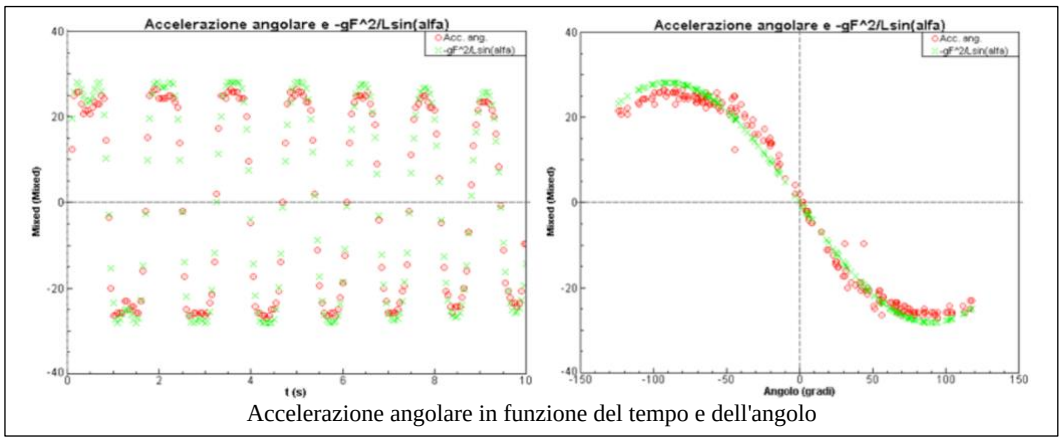
§ vedi ad esempio L. Pipes: *Applied mathematics for Engineers and Physicists* McGraw-Hill 1946
** Si trascura qui il momento d'inerzia del disco cioè il terzo termine della formula (1).



Velocità angolare al quadrato e previsione teorica in base alla conservazione dell'energia

Si può vedere che il modello teorico rappresenta abbastanza bene l'andamento durante la prima oscillazione ma, naturalmente non tenendo conto dello smorzamento, non può rendere conto dei dati successivi corrispondenti ad ampiezze che si riducono nel tempo.
Un ulteriore controllo del modello può essere effettuato confrontando l'andamento sperimentale dell'accelerazione con quello teorico [$a_{teorica} = -gF^2/L\sin(\phi)$] sia in funzione del tempo che in funzione dell'angolo.
In entrambi i casi si può vedere che l'andamento teorico rivela discrepanze dovute al fatto che nel modello teorico sono stati trascurati gli effetti degli attriti.

7. Studio dell'andamento dell'energia nel tempo



Accelerazione angolare in funzione del tempo e dell'angolo

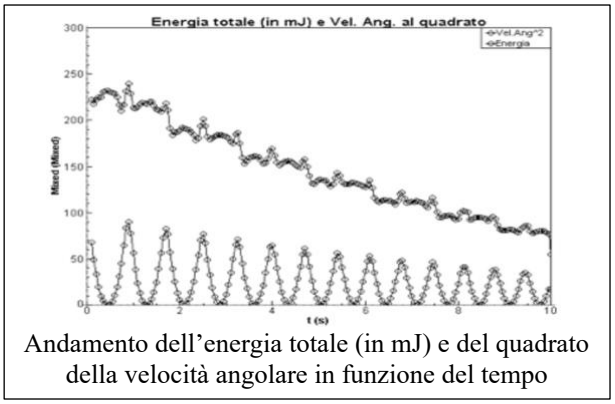
L'energia totale del pendolo si puo' scrivere come:

$$E_{tot} = 1/2\ I\ \omega^2 + (ml/2 + ML)\ g\ (1-\cos\phi) \qquad (6),$$

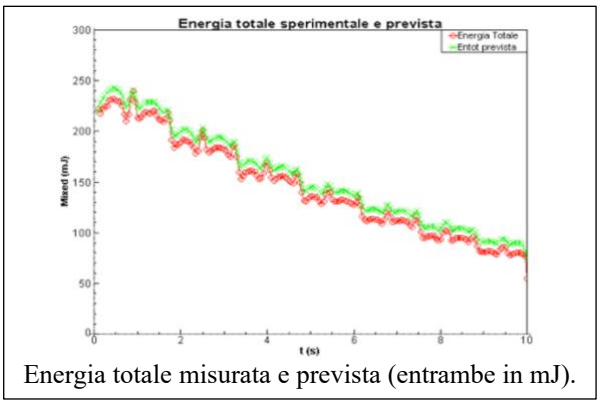
dove $\omega = d\phi/dt$, il primo termine è l'energia cinetica ed il secondo quella potenziale. Assumiamo per il momento d'inerzia totale $I \approx 1/3\ ml^2 + ML^2$, e mettiamo in evidenza l'energia cinetica $E_{cin} = 1/2ML^2\omega^2$ e potenziale $U = MgL(1-\cos\phi)$ della sola pallina:

$$E_{tot} = 1/2ML^2\omega^2\ (1+1/3\ ml^2/(ML^2)) + MgL(1-\cos\phi)(1+1/2\ ml\ /ML)) \qquad (7).$$

Il grafico dell'energia totale calcolata mediante la (7), è riportato qui di seguito insieme con quello della velocità angolare al quadrato.



Andamento dell'energia totale (in mJ) e del quadrato della velocità angolare in funzione del tempo



Energia totale misurata e prevista (entrambe in mJ).

Si nota che la diminuzione dell'energia è più rapida quando la velocità è massima (come deve essere per una forza resistente proporzionale alla velocità).

Si può anche verificare che la diminuzione dell'energia nel tempo corrisponde al lavoro della forza resistente.

Per valutare sperimentalmente il momento della forza resistente M_R , in base alla (2), si deve fare la differenza fra $-g/LF^2\sin\phi$ e l'accelerazione angolare $d^2\phi/dt^2$:

$$M_R = I(-g/LF^2\ \sin\phi - d^2\phi/dt^2) \qquad (8)$$

A questo punto, si può calcolare il lavoro della forza resistente integrando sul tempo il termine $M_R\ (d\phi/dt)dt$,

INDICE

Introduzione 2
Contenuto del kit 3
L'apparato sperimentale 4
1. L’equazione del moto del pendolo 5
2. L'uso di phyphox per acquisizione dati 6
3. Dati acquisiti sostituendo la sfera con un disco 11
4 Analisi con foglio elettronico: interpolazione con una funzione predefinita 12
5. Interpolazione con simulazione ottenuta da calcolo iterativo 13
6. Studio del periodo in funzione dell'ampiezza 15
7. Studio dell’andamento dell’energia nel tempo 17