Pendolo di Wilberforce:

Analisi completa con accelerometro/giroscopio e Phyphox

Il pendolo Wilberforce è un dispositivo didattico spesso utilizzato nelle dimostrazioni in classe per mostrare il sorprendente fenomeno delle oscillazioni accoppiate (rotazionali e longitudinali) che producono battimenti in una speciale configurazione massa-molla. Il fenomeno è particolarmente sorprendente per un osservatore lontano, che rileva facilmente il movimento longitudinale, ma potrebbe non notare la presenza di rotazione. L'oscillazione verticale sembra smorzarsi completamente per poi riapparire senza azione esterna (come se ci fosse una forza invisibile). Qui proponiamo una versione rivista dell'esperimento classico, come esempio di un uso didattico efficiente delle moderne tecnologie che offrono una comprensione più profonda dei fenomeni attraverso l'acquisizione di dati in tempo reale sia di rotazione che di oscillazione verticale, utilizzando un accelerometro/giroscopio MEMS e il software gratuito Phyphox per mostrare il movimento del dispositivo sullo schermo di uno smartphone o tablet.

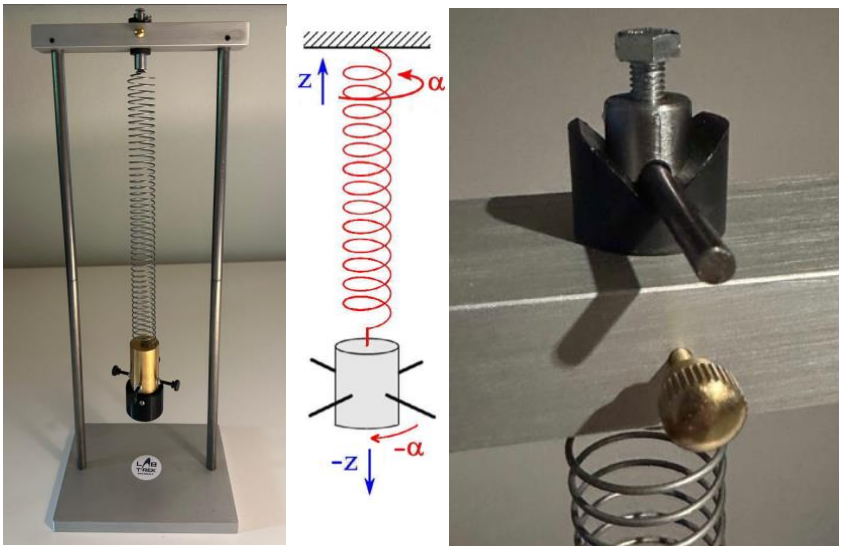


FIGURA 1. Pendolo di Wilberforce: immagine, sistema di riferimento, dettaglio del dispositivo di sospensione

1. INTRODUZIONE

Il pendolo di Wilberforce [1] ha suscitato la curiosità di molti, tra cui Arnold Sommerfeld [2], che ci ha fornito una trattazione teorica completa. Recentemente è stato studiato anche con l'ausilio di un sistema di acquisizione dati in tempo reale (sonar interfacciato ad un PC) che misura solo l'oscillazione verticale z, ed è stato eseguito anche uno studio completo con accelerometro/giroscopio, ma utilizzando costosi datalogger e software. Sono disponibili anche pendoli Wilberforce commerciali, con *misurazioni indirette* dello spostamento verticale z e dell'angolo di rotazione α, utilizzando un sensore di coppia/forza e richiedendo ancora costosi datalogger e software.
Il modello prodotto da Labtrek è un dispositivo wireless molto semplice che caratterizza il moto sia per oscillazioni longitudinali che rotazionali, senza bisogno di datalogger, PC e software commerciali: è sufficiente un comune smartphone o tablet.
Per raggiungere questo obiettivo, utilizziamo un sensore di orientamento assoluto per droni (inclusi accelerometro e giroscopio) azionato da un microcontrollore con WIFI e Bluetooth integrati e con batteria per ioni di litio, caricabile via USB-C.

2. L'APPARATO SPERIMENTALE

Il pendolo Wilberforce è un oscillatore massa-molla, in cui la massa all'estremità della molla non solo oscilla in direzione verticale, ma ruota anche in movimento oscillatorio.

La dinamica del pendolo Wilberforce comprende tre diversi tipi di movimento: due oscillazioni roto-traslazionali *(Modi Normali)* e un'oscillazione *Mista con battimenti*, in cui l'energia del sistema viene trasferita tra le oscillazioni verticali e rotazionali. Questo comportamento peculiare si ottiene se:

- collegamenti rigidi sono previsti su entrambe le estremità della molla elicoidale,
- il rapporto k/δ tra la costante elastica longitudinale k e la costante elastica torsionale δ è uguale al rapporto m/I tra la massa oscillante m e il suo momento d'inerzia I rispetto all'asse verticale.

Il pendolo Labtrek utilizza una molla in acciaio inox con 50 spire (diametro bobina 25 mm, diametro filo 1,3 mm) e una massa cilindrica in ottone di circa 0,5 kg, con 4 viti per la regolazione fine del momento inerziale (figura 1).

L'estremità superiore della molla è fissata a un cilindro metallico che può essere ruotato attorno all'asse e spostato in direzione verticale. Con un'opportuna scelta di spostamento iniziale z_0 e rotazione α_0 possiamo eccitare ciascuno dei tre diversi moti del pendolo.

Il *dispositivo di sospensione* mostrato in figura 1 funziona come segue: una piccola rotazione manuale in senso orario della barra orizzontale conferisce all'estremità superiore della molla sia uno spostamento verso l'alto che una rotazione in senso orario (a causa delle inclinazioni della parte superiore del cilindro cavo). Si noti che un'azione applicata all'estremità superiore della molla corrisponde a un'azione opposta applicata al bob: in questo caso uno spostamento del bob $z_0<0$ e una rotazione del bob $\alpha_0<0$ (*modo normale* 1, con z_0 e α_0 in fase, vedi sezione 5). Una rotazione della barra in senso opposto eccita il *modo normale* 2 (con z_0 e α_0 in opposizione di fase).

Nella parte inferiore del cilindro di ottone è avvitato il sensore MEMS dotato di un interruttore di accensione, un LED rosso-verde che indica lo stato di carica della batteria e una porta USB-C per la ricarica della batteria.

Utilizzando il programmatore Arduino, abbiamo caricato nel microprocessore il codice per la connessione Bluetooth all'applicazione Phyphox, e per una semplice conversione dei dati dei segnali di uscita del sensore (accelerazione verticale a_z e angolo di rotazione α). Conoscendo i valori della costante elastica k e della massa oscillante m, utilizzando la legge di Newton ($F_z=ma_z$), la legge di Hooke ($F_z=-kz$), dai valori di accelerazione misurati a calcoliamo i valori di spostamento z attraverso l'equazione:

$$z = - (m/k)a. \qquad (1)$$

LabTrek ha sviluppato un'applicazione per Android e IOS basata sull'applicazione *Phyphox*, scaricabile gratuitamente su internet.

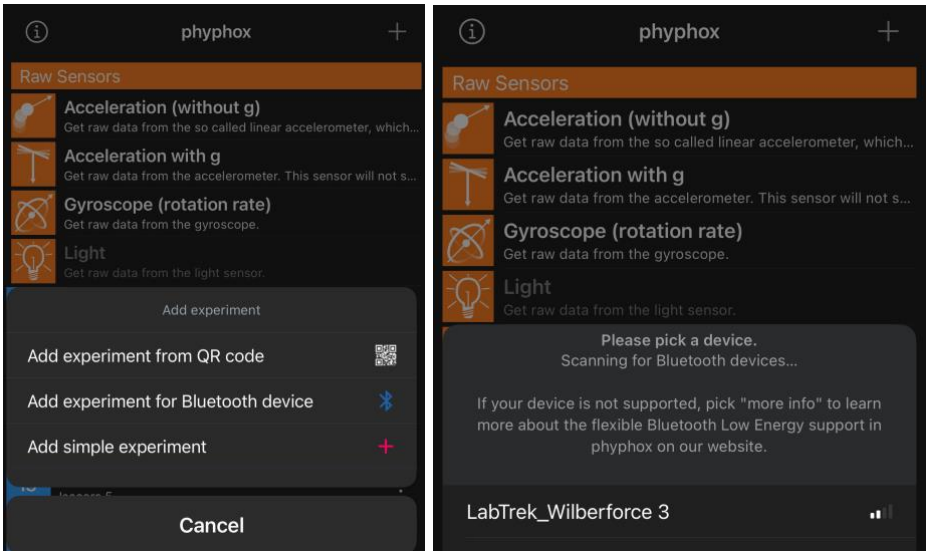


Figura 2 Aggiunta di un esperimento Bluetooth a Phyphox e selezione di *Labtrek Wilberforce*

Per installare il menu di LabTrek all'interno di Phyphox, basta avviare Phyphox sullo smartphone o sul tablet, cliccare sul + in alto a destra, selezionare l'opzione "*Aggiungi esperimento per dispositivo Bluetooth*".
Phyphox cerca immediatamente i dispositivi Bluetooth disponibili.
È necessario selezionare "*Labtrek Wilberforce*". Ovviamente il dispositivo va posizionato non troppo lontano dallo smartphone/tablet che lo sta cercando, dato che la connessione Bluetooth ha una portata non superiore ai dieci metri.
Non appena il datalogger Labtrek per pendolo è stato rilevato, è possibile salvare l'esperimento Labtrek nell'elenco Phyphox (Fig. 3).

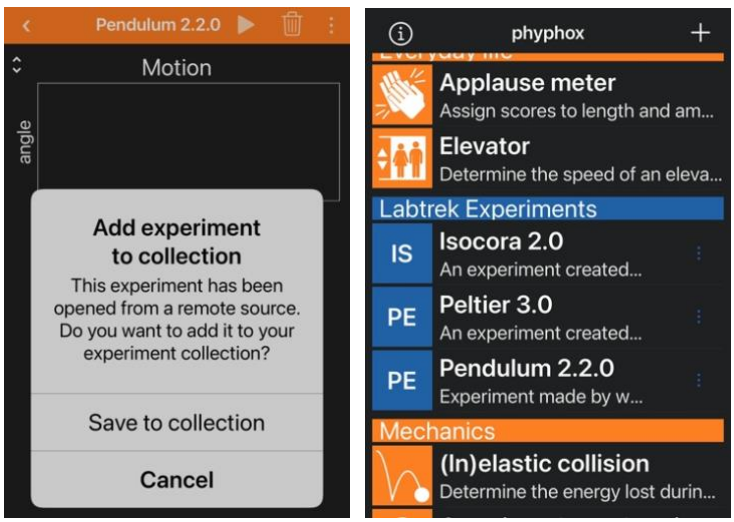


Figura 3 Salvataggio dell'esperimento in un nuovo elenco di esperimenti Phyphox

NOTA: Il sensore MEMS è alimentato da una batteria agli ioni di litio (che può essere caricata tramite la porta USB-C) con un monitoraggio automatico del livello di carica (un LED verde diventa rosso quando il livello di carica è BASSO). Inoltre, quando il dispositivo viene acceso tramite l'interruttore inferiore, il segnale angolare viene impostato sul valore zero; tuttavia, è sempre possibile eseguire una regolazione fine del valore zero ruotando leggermenteil dispositivo di sospensione, fino a ottenere un buon annullamento dell'offset, quindi è possibile fare clic sul pulsante "Cancella dati"  e riavviare l'acquisizione

Una volta identificato il dispositivo, si apre la finestra "Wilberforce" per l'acquisizione dei dati (Fig. 4), con tre grafici vuoti. In questa finestra, cliccando su uno dei simboli della "doppia freccia" a sinistra, è possibile accedere alla versione del singolo grafico con le opzioni "Zoom", "Selezione" e "Altri strumenti":

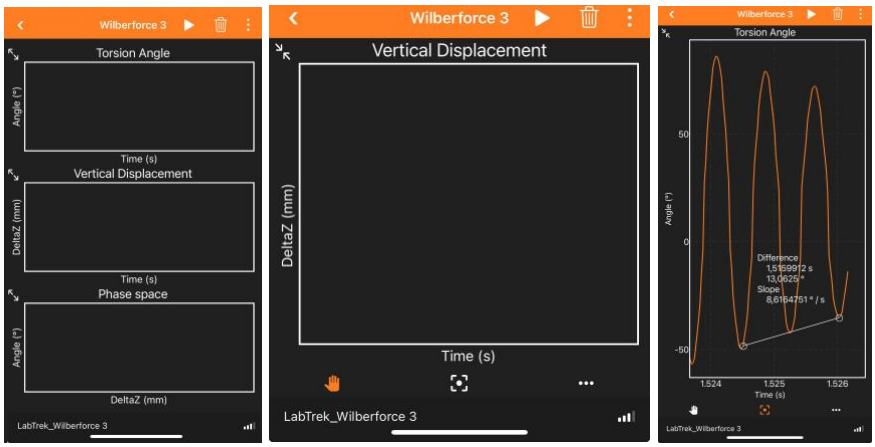


Figura 4 Finestra di acquisizione dati (a sinistra), con Opzioni (al centro), punti selezionati (a destra)

L'applicazione Phyphox consente pochissime azioni di manipolazione dei dati acquisiti: *Zoom*, (per l'asse y e l'asse x) e *Selezione* di due punti acquisiti (per i quali *viene disegnata l'*interpolazione lineare e l'*intervallo di tempo* = Δx=x2-x1 e *la variazione di ampiezza* = Δy=y2-y1 e *pendenza* della retta interpolante).
Per altre manipolazioni l'utente deve utilizzare un sistema di analisi dei dati esterno (ad esempio Excel©): un click sul simbolo "*Altri strumenti*" apre la finestra in cui è possibile selezionare "*Esporta questo set di dati*" e scegliere il tipo di file di esportazione: Excel, CSV in vari formati

3. RISULTATI SPERIMENTALI

Un esempio di acquisizione dell'angolo di rotazione e dello spostamento verticale è mostrato nella Figura 5. I battimenti sono evidenti: l'oscillazione verticale si scarica lentamente mentre l'oscillazione rotazionale aumenta, poi il processo si inverte (circa ogni 1/2 minuto) con l'energia associata a ciascuna oscillazione che si trasferisce da un movimento all'altro, con dissipazione trascurabile.

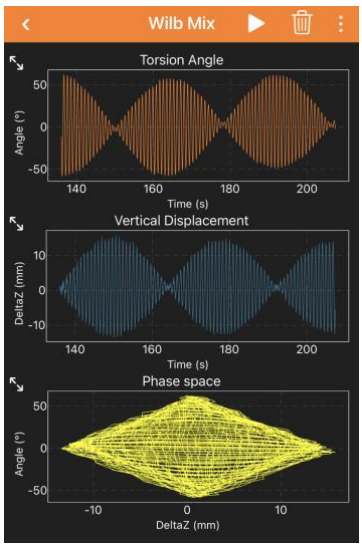


FIGURA 5 : Esempio di dati registrati per il movimento misto.
In rosso l'angolo di rotazione α, in blu lo spostamento verticale Δz, in giallo il grafico dello spazio delle fasi α(Δz)

Le due oscillazioni (traslazione e rotazione) devono avere lo stesso periodo $T_z=2\pi/\omega_z=2\pi/\sqrt{k/m}) = T_\alpha=2\pi/\omega_\alpha=2\pi/\sqrt{\delta/I}$ per ottenere uno scambio energetico completo. La regolazione può essere ottenuta regolando il momento d'inerzia della massa oscillante attraverso le 4 manopole a vite sporgenti dal cilindro in ottone.

4. ANALISI DEI DATI

L'energia totale in ogni movimento è costituita da un *termine* potenziale elastico E_e e da un *termine cinetico* E_k.
Per il moto longitudinale:

$$E_z = E_{kz} + E_{ez} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kz^2 \qquad (2)$$

(dove m è la massa, v è la velocità, k è la costante elastica e z è lo spostamento dalla posizione di equilibrio).
Per il movimento rotatorio:

$$E_\alpha = E_{k\alpha} + E_{e\alpha} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}\delta\alpha^2 \qquad (3)$$

(dove I è il momento inerziale, $\omega = d\alpha/dt$ è la velocità angolare, δ è la costante torsionale e α è l'angolo di rotazione).
L'energia totale del pendolo E_T è quindi

$$E_T = E_z + E_\alpha \qquad (4)$$

Per valutare il comportamento dei vari termini, è necessario conoscere i valori dei quattro parametri m, k, I, δ.
Per calcolare k possiamo misurare l'allungamento della molla sotto una forza nota (ad esempio il peso del cilindro mg).
Possiamo calcolare il momento d'inerzia I per una geometria semplice [nota 3]; per un cilindro di raggio R e massa m è $I=\tfrac{1}{2}mR^2$.

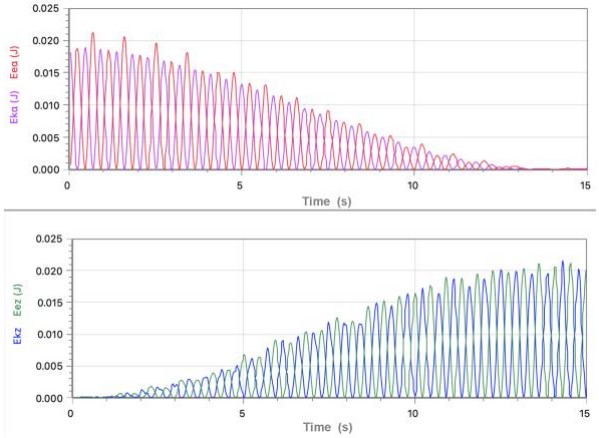


FIGURA 6 : *Eka* , *Eea* , *Ekz* , *Eez* durante il mezzo battimento

Una volta noti i quattro parametri k, m, δ, I, è possibile calcolare, a partire dagli angoli e dagli spostamenti misurati, le energie cinetiche $E_{k\alpha}$ e le energie *potenziali* $E_{e\alpha}$ per le oscillazioni rotazionali, e E_{kz}, E_{ez} per le oscillazioni verticali come mostrato in figura 7

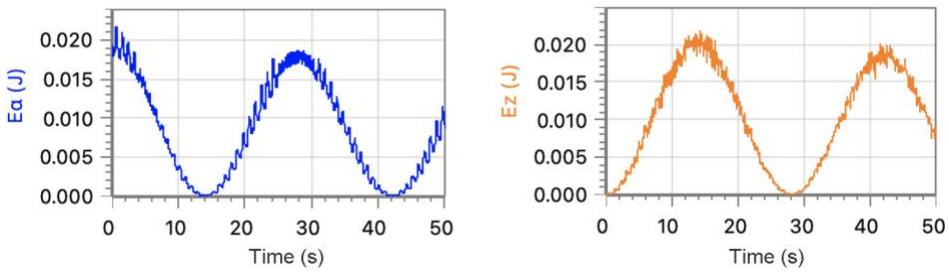


FIGURA 7: Energia rotazionale totale *Ea* ed energia traslazionale *Ez* calcolate per circa 10 battimenti

Sommando i due termini "pulsati" $E_z(t)$e $E_\alpha(t)$ $t)$ otteniamo l'energia totale $E_T(t)$ che diminuisce nel tempo (figura 8).
Le piccole oscillazioni che modulano il decadimento esponenziale in figura 8 possono essere attribuite all'approssimazione dei valori dei parametri utilizzati per calcolare l'energia totale.

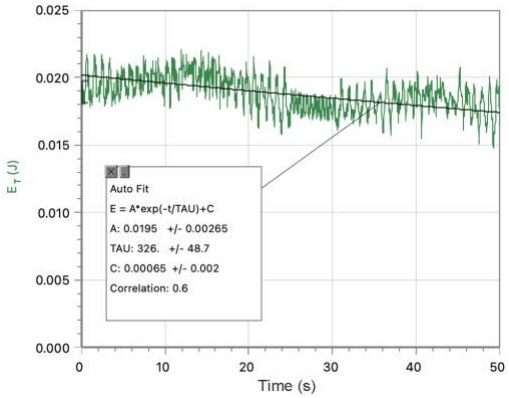


FIGURA 8: Energia totale in funzione del tempo

Nell'analisi semplificata proposta con le equazioni (2),(3),(4) lo smorzamento è stato trascurato, e si è assunto un *perfetto equilibrio* del pendolo ($\omega=\omega_z=\omega_\alpha$), e infine in (4) l'*energia di accoppiamento* $E_\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon z$, dove ε è il coefficiente di accoppiamento, è stata trascurata.
Un'equazione approssimata migliore (ancora una volta trascurando lo smorzamento) è:

$$E_T=E_z+E_\alpha+ E_\varepsilon =\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kz^2+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}\ \delta\alpha^2+\frac{1}{2}\varepsilon\alpha z \qquad (5)$$

5. MODI NORMALI

Sebbene a prima vista le oscillazioni *verticali* e *torsionali* sembrino avere esattamente la stessa frequenza, un'analisi di Fourier (sia del moto longitudinale che di quello rotatorio (figura 9) mostra che sono presenti due frequenze (ω_1 e ω_2):
Queste sono le frequenze dei due *modi normali* [9] :

$$\omega_1= \omega + \varepsilon /(4\omega \sqrt{kI})$$
$$\omega_2 = \omega -\varepsilon/(4\omega \sqrt{kI}) \qquad (6)$$

con con $\omega=\omega_z=\sqrt{k/m}$) $=\omega_\alpha=\sqrt{\delta/I}$
La semi-differenza tra le due frequenze è la frequenza di *battimento:*

$$\omega_B = \varepsilon/(4\omega \sqrt{kI}) = \varepsilon/(4\omega \sqrt{m\delta}) \ll\omega$$

I due modi normali possono essere eccitati scegliendo le condizioni iniziali
$z_0 = z(t=0)$ e $\alpha_0= \alpha(t=0)$, rispettivamente con :

$$z_0 = \pm\sqrt{I/m}\ \alpha_0 = \pm\sqrt{\delta/k}\ \alpha_0 = \pm\Gamma\alpha_0 \qquad (7)$$

dove Γ è il *raggio d'inerzia*.

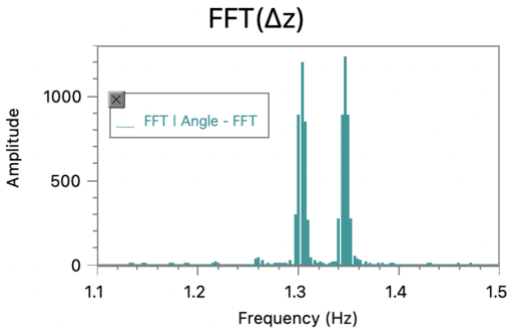


FIGURA 9: Diagramma della trasformata di Fourier (compaiono due frequenze)

La Figura 10 mostra una registrazione delle rotazioni e delle traslazioni per una delle due modalità normali.

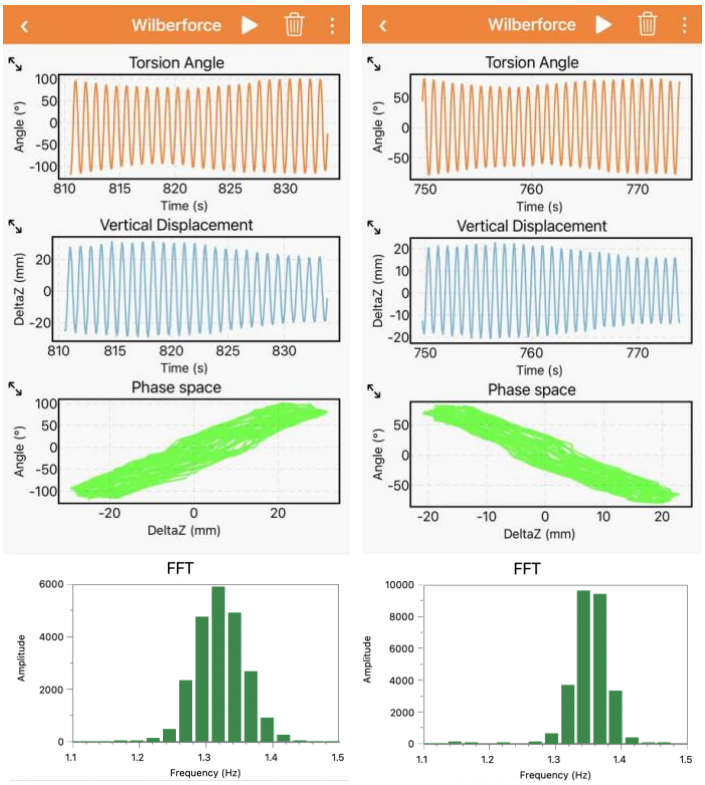


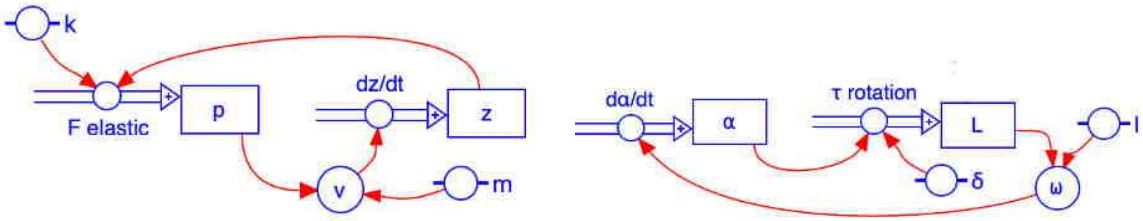
FIGURA 10: Esempio di dati registrati per le due modalità FFT normale e corrispondente

Si può vedere che nella modalità normale non ci sono battimenti e la massa ruota in senso orario quando sale e in senso antiorario quando scende. Nel secondo moto normale, la massa ruota in senso antiorario quando sale e in senso orario quando scende. Cioè, i grafici di $\alpha(t)$ e $z(t)$ sono in fase nel primo caso e in opposizione nel secondo caso.

6. SIMULAZIONI

I dati sperimentali possono essere confrontati con una simulazione ottenuta Utilizzando Coach 7

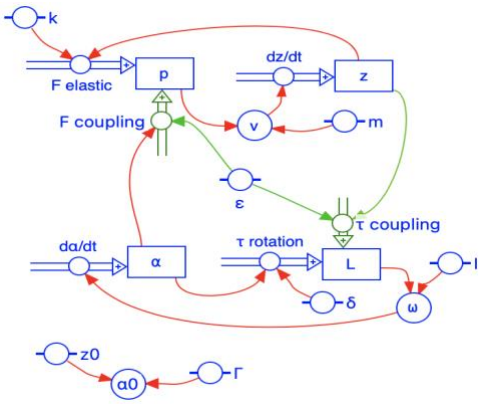
Costruzione del modello



Lo spostamento **z** può essere definito come l'*integrale* della velocità **v=dz/dt : z=** $\int$ v dt, e l'angolo **α** può essere definito come l'*integrale* della velocità angolare **ω=δα**/dt : **α=** $\int$ w dt
Allo stesso modo, il momento lineare **p** può essere definito come l'*integrale* della forza **p=**$\int$ **F** dt e il momento angolare **L** può essere definito come l'*integrale* della coppia **L=**$\int$ **t** dt

- Definisci le *costanti* **: m , k, δ** e **I**
- Definisci la *variabile* **v** come: **v=p/m** e la *variabile* **ω** come: **ω = L/I**

- Definisci la *variabile di stato* : **p** che è alimentata dal *flusso* **F elastica** = dp/dt,
  la *variabile di stato* : **z** che è alimentata dal *flusso* **dz/dt** (la velocità di variazione di **z**),
- Definisci la *variabile di stato* : **L** che è alimentata dalla *rotazione del* **flusso** τ = dL/dt.,
- Definisci la *variabile di stato* **α** , alimentata dal *flusso* **dα /dt** (il tasso di variazione di **α**),
- Collega correttamente tutti gli elementi utilizzando i *Connettori*



Alla **forza F elastica** deve essere aggiunta una forza **Fcoupling** =1/2 **ε α** e alla coppia **τ** deve essere aggiunta una coppia **τ coupling** =1/2 **ε α** , dove **ε** è la costante di accoppiamento

- Definisci la *costante* **ε**
- Introduci **Fcoupling** che influisce su **p**
- Introduci **τ coupling** che influisce su **L**

Valutazione dei parametri m, k, I, δ, ε

- Il valore di **m** si ottiene pesando il bob.
- Per determinare **k** si misura l'allungamento della molla sotto la forza gravitazionale **mg.**
- Si può ottenere il momento di inerzia **I** attraverso due misurazioni del periodo di rotazione: prima con il solo bob, e poi aggiungendo un cilindro anulare (di massa nota M, raggio interno R_1, raggio esterno R_2), il cui momento di inerzia è $I_a=½M(R_2^2+R_1^2)$**.** I due periodi (**T** *senza* e $\mathbf{T_1}$ *con* il cilindro anulare) obbediscono alle relazioni: $(T/2\pi)^2 = I/\delta$ e $(T1/2\pi)^2 =(I+Ia)/\delta$, quindi: $\mathbf{I = I_aT^2/(T_1^2–T^2)}$**.**
- È possibile calcolare la costante di torsione $\mathbf{\delta} = I/(\mathbf{T}/2\pi)^2$
- La costante di accoppiamento **ε** può essere calcolata dalla relazione $\mathbf{\varepsilon} = 2\Omega^* \sqrt{kI}$), dove Ω è la frequenza di battimento. L'accoppiamento è "debole", quindi si può presumere come prima ipotesi **ε** ~1%.

Caricamento dei dati sperimentali per il confronto

Prepara due grafici : **z**(t) e **α** (t), posizionandoli in due pannelli.

Quindi puoi selezionare l'opzione "**Importa grafico di sfondo**" per mostrare i dati acquisiti per **z**(t) e **α**(t).
Quindi puoi simulare i movimenti scegliendo i valori adatti per la **durata** (60 s) e l'**intervallo di passo** (0,05 s), e scegliendo il metodo di **integrazione** (RK4) e facendo clic sul **pulsante Start**.
Nota: Sono necessari alcuni aggiustamenti delle costanti calcolate δ e I, al fine di approssimare i dati sperimentali. Di solito anche il valore di ε deve essere opportunamente regolato: aumentando il suo valore aumenta la frequenza di battimento Ω.

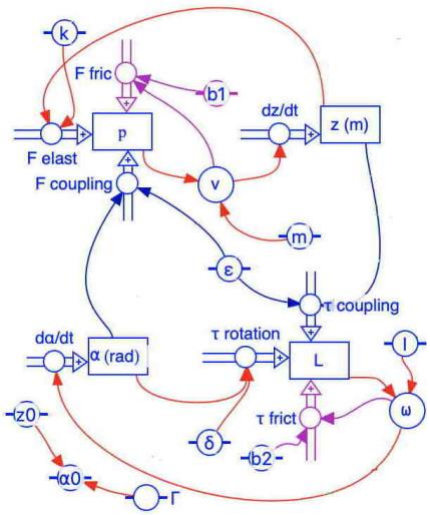
Tenendo conto della dissipazione.

Puoi definire due nuovi flussi (supponendo una resistenza viscosa):

- **F frict = - b1*v** , per il moto traslazionale (dove la costante **b1** misura l'intensità della resistenza traslazionale) per alimentare la variabile di stato **p**.
- **τ frict = -b2 *ω** , per il moto rotatorio (dove la costante **b2** misura l'intensità della resistenza rotazionale), per alimentare la variabile di stato **L.**

Entrambe le costanti **b1** e **b2** devono essere definite e i flussi devono essere collegati alle nuove costanti e alle variabili **v** e **ω**.

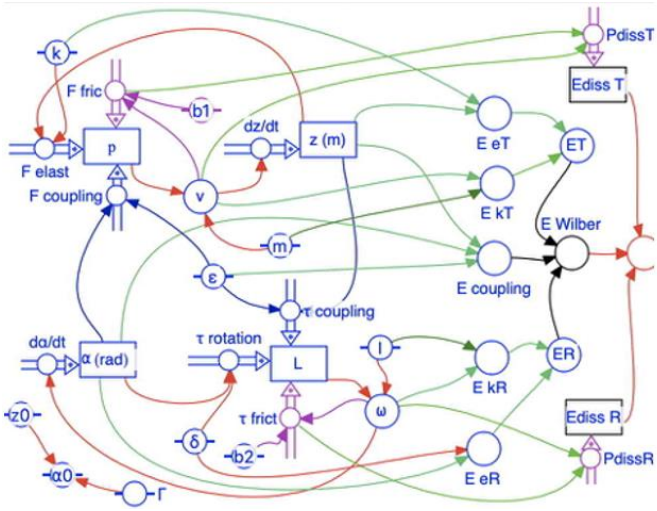
Nota: i valori di prova per **b1** e **b2** possono essere scelti nell'intervallo da 1 E-6 a 1 E -3



I **ModiNormali** possono essere eccitati scegliendo correttamente le condizioni iniziali, $z_0 = +\Gamma\alpha_0$ per il modo normale 1 (in fase) e $z_0 = -\Gamma\alpha_0$ per il modo normale 2 (controfase), dove Γ è il *raggio di rotazione* dato dalla relazione $\Gamma = \sqrt{I/m}$.

- Definisci un nuovo **Γ costante** e usalo per collegare il valore di **α_0** al valore di **z_0** in modo da poter scegliere uno qualsiasi dei tre possibili tipi di movimento semplicemente cambiando il valore Γ (moltiplicandolo per 0, +1, -1)
- Creare un nuovo grafico (z vs. α) per visualizzare lo spazio di configurazione

Termini di energia potenziale (elastica) e cinetica



Per *il moto* traslazionale :

- Definisci la variabile di stato Energia elastica **EeT= 1/2 k*z2** e collegala con **k** e **z.**
- Definisci la variabile di stato Energia cinetica **EkT= 1/2 m*v2** e collegala con **m** e **v.**
- Per *il moto* rotatorio :
- Definisci la variabile di stato Energia elastica **EeR= 1/2 D*α2** e collegala con **D** e **α .**
- Definisci la variabile di stato Energia cinetica **EkR= 1/2 I*ω2** e collegala con **I** e **ω.**

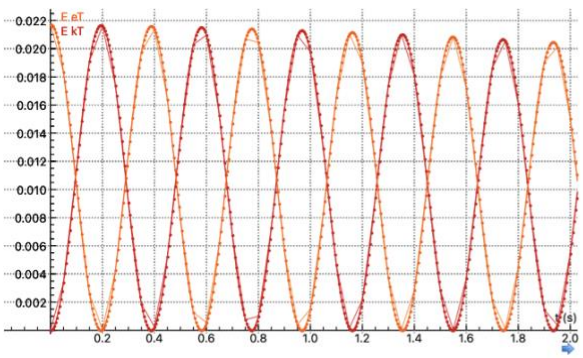
L'energia totale

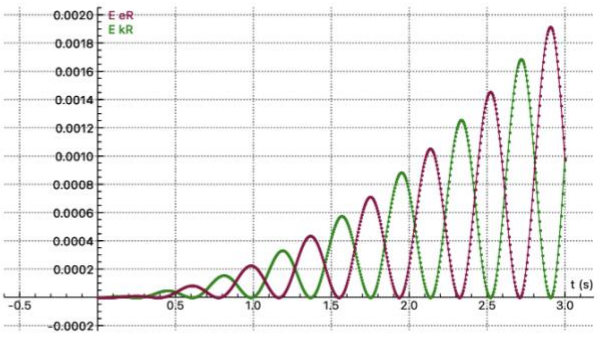
L'energia traslazionale è **ET = EeT + EkT**
L'energia rotazionale è **ER** = **EeR** + **EkR**
Inoltre è necessario tenere conto dell' *energia di accoppiamento* **Ecoupling= 1/2α z**
Quindi, l'energia totale del pendolo è **E = EeT + EkT + EeR + EkR** + **Ecoupling**
Definisci le nuove *variabili di stato* e collegale in modo appropriato con *i Connettori*.
Quindi esegui la simulazione e osserva i risultati.

Conservazione dell'energia

Per prima cosa studia la conservazione dell'energia in un *breve* intervallo di tempo (es. 2 s), per ogni tipo di movimento.

- Crea il grafico di **EeT** vs. **t**, quindi aggiungi nell'asse verticale anche la variabile **EkT**: vedrai che durante **un periodo di oscillazione di metà** l'energia cinetica **traslazionale** si trasforma in energia potenziale traslazionale (elastica).
- Quindi sostituisci le due variabili con **EeR** e **EkR**: vedrai che durante **un periodo di semioscillazione** l' energia **cinetica rotazionale** si trasforma in energia potenziale rotazionale (elastica).





Note

[1] Prende il nome da Robert Lionel Wilberforce, un dimostratore di fisica presso i Cavendish Labs, che nel 1894 dimostrò come una massa cilindrica sospesa a una molla elicoidale possa subire oscillazioni sia rotazionali che longitudinali, pubblicando in seguito un articolo *On Vibrations of Loaded Spiral Spring*, su Philosophical Magazine 38, 386 (1895)

[2] A. Sommerfeld, *Lissajous-Figuren und Resonanzwirkun-gen bei schwingenden Schraubenfedern; ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses,* in Adolph Wüllner Festschrift, Leipzig, 162-193 (1905)

[3] Una misura del momento di inerzia *Ix* per una massa non cilindrica può essere ottenuta con una doppia Una misura del momento di inerzia I_x per una massa non cilindrica può essere ottenuta con una doppia misurazione del periodo: con la sola massa e poi aggiungendo un cilindro anulare (di massa *M,* raggio interno R_1 raggio esterno R_2), il cui momento di inerzia è $I_n=M(R_2^2- R_1^2)/2$. I due periodi misurati obbediscono alle relazioni $(T_1/2\pi)^{2=} I_x/D$, $(T_2/2\pi)^2= (I_x+I_n)/D$, da cui otteniamo: $I_x= I_n\ T_1^2\ /(T_2^2- T_1^2)$. La costante torsionale D può essere calcolata dal periodo $T=2\pi/\omega$ e dal rapporto che dà la velocità angolare $\omega^2 = D/I$: $D = I(2\pi/T)^2$..